海洋数学 · 期末复习

海洋数学基础及其应用

数值方法与数值模拟

前四次课 · 刘庆翔

数值方法

1. 拉格朗日、Hermite 与三次样条
2. 最小二乘与模型线性化
3. 高斯消元、主元选择与 LU 分解
4. Jacobi、Gauss–Seidel 与收敛判断

核心考点 ↗　期末题库解析 ↗

后四次课 · 吴克俭

数值模拟

1. 偏微分方程、差分与适定性
2. 扩散、对流与特征线
3. 波动、Fourier 谱、小波与 EMD
4. 概率分布与平稳随机过程

核心考点 ↗　配套练习与解析 ↗

复习重点

数值方法按期末题库四个主题组织。能完整推导插值和最小二乘公式，能做带置换的消元、LU 前代回代和三轮迭代。

数值模拟先掌握特征线、扩散与对流差分、相容性和稳定性，再复习波动、Fourier 谱、IMF 和平稳随机过程。14 道配套题根据课件编写。

每个主题标注对应课件与 PDF 页码。27 道题均按步骤讲解，期末题库保留原题顺序。

前四次课 · 刘庆翔

数值方法 · 核心考点

从离散数据构造函数，再用直接法和迭代法解线性方程组。

拉格朗日、Hermite 与三次样条

计算方法课件 01，第 10–79 页 · 课件 02，第 18–104 页

拉格朗日插值

给定 $n+1$ 个互异节点 x_i 和函数值 y_i。先构造在本节点取 1、其余节点取 0 的基函数，再对基函数加权。

$$\ell_i(x)=\prod_{j\neq i}\frac{x-x_j}{x_i-x_j},\qquad P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}y_i\ell_i(x).$$

P_n 的次数至多为 n。若 f 在含节点和待估点的区间上具有连续的 $n+1$ 阶导数，则 $f(x)-P_n(x)=f^{(n+1)}(\xi)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)/(n+1)!$。分段线性插值在每一小段独立用两个端点，整体连续。

两点三次 Hermite 插值

在区间 $[x_i,x_{i+1}]$，令 $h_i=x_{i+1}-x_i$，$t=(x-x_i)/h_i$，并令 m_i 为节点斜率。四个基函数分别控制两个函数值和两个斜率。

$$\begin{aligned}H_{00}&=2t^3-3t^2+1,\quad & H_{01}&=-2t^3+3t^2,\\ H_{10}&=t^3-2t^2+t,\quad & H_{11}&=t^3-t^2.\end{aligned}$$

$$S_i=y_iH_{00}+y_{i+1}H_{01}+h_im_iH_{10}+h_im_{i+1}H_{11}.$$

乘 h_i 是因为 $d/dx=h_i^{-1}d/dt$。相邻分段若使用同一个节点斜率，拼接处函数和一阶导数连续。

三次样条的斜率方程

再要求每个内节点的二阶导数连续。写 $\delta_i=(y_{i+1}-y_i)/h_i$，得

$$h_im_{i-1}+2(h_{i-1}+h_i)m_i+h_{i-1}m_{i+1}=3(h_i\delta_{i-1}+h_{i-1}\delta_i).$$

题库指定 $m_0=m_n=0$，即两端一阶导数为零的夹持边界。自然边界给定 $S''(x_0)=S''(x_n)=0$，对应 $2m_0+m_1=3\delta_0$ 和 $m_{n-1}+2m_n=3\delta_{n-1}$。

> 题 1–5。写样条结果时逐段标区间，再检查插值、端点斜率及内节点的二阶导数。

最小二乘与模型线性化

计算方法课件 03，第 3–26、44–74 页

从残差到正规方程

选基函数 $\phi_j(x)$，组成设计矩阵 $X_{ij}=\phi_j(x_i)$。令残差 $r=y-Xa$，最小化平方和 $r^{\mathsf T}r$。一阶条件是残差与每列基向量正交。

$$X^{\mathsf T}Xa=X^{\mathsf T}y,\qquad X^{\mathsf T}r=0.$$

满列秩时 $X^{\mathsf T}X$ 正定，拟合系数唯一。取基函数 $1,x$ 得

$$b=\frac{\sum_i(x_i-\bar x)(y_i-\bar y)}{\sum_i(x_i-\bar x)^2},\qquad a=\bar y-b\bar x.$$

指数、幂函数与加权拟合

指数模型 $y = ae^{bx}$ 取 $Y = \ln y$，拟合 $Y = A + bx$ 后还原 $a = e^{A}$。幂模型 $y = ax^{b}$ 在 $x, y > 0$ 时可拟合 $\ln y = A + b \ln x$。多项式模型对系数线性，设计矩阵的列取 $1, x, x^{2}, \ldots$。

给定正权 w_i 时，最小化 $\sum_i w_i r_i^2$ 得 $X^{\mathsf{T}} W X a = X^{\mathsf{T}} W y$。对数变换拟合优化的是对数残差平方和，指数模型还原后可在原尺度计算预测误差。

> 题 6–7。先写目标函数，再写正规方程，最后报告实际模型中的参数。

高斯消元、主元选择与 LU 分解

计算方法课件 04，第 24–100 页

消元与回代

第 k 步选定主元 a_{kk} 后，计算乘子 $m_{ik} = a_{ik}/a_{kk}$，用 $R_i \leftarrow R_i - m_{ik} R_k$ 消去第 k 列下方元素。对增广矩阵施行同样的行操作，得到上三角系统并从最后一行回代。

列主元在当前列的未消元部分选绝对值最大的系数，交换行。全主元在右下未消元子块中选绝对值最大者，交换行和系数列。交换系数列改变变量在系统中的排列，回代后按列置换恢复原下标。

LU 与消元乘子

按原行序完成无换行消元时，上三角矩阵是 U，各步乘子存入单位下三角矩阵 L 对应位置，于是 $A = LU$。先前代解 $Ly = b$，再回代解 $Ux = y$。有行置换时分解写作 $PA = LU$，前代使用 Pb。

> 题 8–11。消元表上保留右端，LU 的乘子放在 L 中。分别用两种方法时，展示增广矩阵和 $Ly = b$ 两条计算路径。

Jacobi、Gauss–Seidel 与收敛判断

计算方法课件 05，第 22–105 页

按新旧分量更新

设 $A = D + L + U$，这里 D, L, U 是 A 的对角、严格下三角、严格上三角部分，且 $a_{ii} \neq 0$。

$$
\begin{aligned}
x_{\mathrm{J}}^{(k+1)} &= D^{-1}\big[b - (L + U)x^{(k)}\big], \\
x_{\mathrm{GS}}^{(k+1)} &= (D + L)^{-1}\big[b - Ux^{(k)}\big].
\end{aligned}
$$

Jacobi 的各分量只读上一轮，可并行计算。Gauss–Seidel 按行立即使用本轮已更新的值。逐分量 SOR 更新把旧值与当前 Gauss–Seidel 候选值用权重 $1 - \omega$ 和 ω 组合。

谱半径与后验误差

对 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$，误差满足 $e^{(k+1)} = Be^{(k)}$。对任意初值收敛当且仅当 $\rho(B) < 1$。严格行对角占优保证 Jacobi 和 Gauss–Seidel 收敛。若取诱导范数 $\|B\| \le q < 1$，则

$$
\|x^{(k)} - x^{*}\| \le \frac{q}{1 - q} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|.
$$

> 题 12–13。换行改变迭代格式及收敛性。按题意列出初值与三轮值，计算时保留中间精度。

数值方法 • 13 题

期末题库逐题解析

题源为期末练习题原卷。

1　推导拉格朗日插值

> 阐述 $n+1$ 个点的拉格朗日插值的推导过程。

1. 先做出只在一个节点起作用的基函数

给定互异节点 $x_0,\dots,x_n$ 和对应值 $y_0,\dots,y_n$。考虑第 i 个节点。要让一个多项式在其余节点 x_j 处都取零，就给它乘上每个对应的因子 $x-x_j$。这些因子在 x_i 处的乘积非零，所以除以该乘积就能把 x_i 处的值调成 1。

$$\ell_i(x)=\prod_{\substack{0\le j\le n\\ j\neq i}}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}.$$

2. 用节点值加权并检查插值条件

令 $P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}y_i\ell_i(x)$。代入任意节点 x_k 时，只有第 k 项留下，所以 $P_n(x_k)=y_k$。每个 ℓ_i 是 n 个一次因子的乘积，因而 P_n 的次数至多为 n。

3. 说明结果为何唯一

假设另一个次数至多为 n 的多项式 Q_n 也通过所有节点，那么 P_n-Q_n 在 $n+1$ 个互异节点上都取零。一个至多 n 次的非零多项式最多有 n 个根，因此 P_n-Q_n 恒为零。

2　四节点三次插值

> 写出经过 $(-3,-1),(0,2),(3,-2),(6,10)$ 的三次拉格朗日插值多项式，估计 $f(2)$。

1. 从四个节点写出分母

拉格朗日基函数的分母是本节点与其他三个节点的差的乘积。例如在 $x_0=-3$ 处，分母为 $(-3-0)(-3-3)(-3-6)=-162$，分子是 $x(x-3)(x-6)$。同样算出其余三个分母为 $54,-54,162$。

2. 将基函数分别乘对应的函数值

四个权重是 $-1,2,-2,10$。第一、三项的负权重与负分母相消，得到

$$\begin{aligned}P_3(x)&=\frac{x(x-3)(x-6)}{162}+\frac{2(x+3)(x-3)(x-6)}{54}\\&\quad+\frac{2(x+3)x(x-6)}{54}+\frac{10(x+3)x(x-3)}{162}\\&=\frac{23}{162}x^3-\frac{7}{18}x^2-\frac{13}{9}x+2.\end{aligned}$$

代入节点 $x=0$ 时，乘积形式里只剩第二项，得到 $P_3(0)=2$。其他节点可以用同样方式检查。

3. 代入待估点

在 $x=2$ 处，四个基函数的值依次为 $-4/81,10/27,20/27,-5/81$。再乘对应函数值，所以

$$f(2)\approx P_3(2)=\frac{4+60-120-50}{81}=-\frac{106}{81}\approx-1.308642.$$

3 两点三次 Hermite 插值

> 在节点 $0,1$ 构造三次 Hermite 插值多项式，满足 $f(0)=1, f'(0)=1/2, f(1)=2, f'(1)=1/2$。

1. 把四个条件对应到 Hermite 基函数

两端节点为 0 和 1，区间长度 $h=1$，归一化坐标 $t=(x-0)/h=x$。H_{00}, H_{01} 分别配左、右端函数值 $1,2$。H_{10}, H_{11} 分别配左、右端斜率 $1/2, 1/2$，斜率项还要乘区间长度 h。

2. 代入并合并同次项

$$\begin{aligned} H(x) &= (2x^3-3x^2+1) + 2(-2x^3+3x^2) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(x^3-2x^2+x) + \tfrac{1}{2}(x^3-x^2) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2}x^2 - x^3. \end{aligned}$$

3. 按题目条件验算

$H(0)=1$，$H(1)=2$。求导得 $H'(x)=\frac{1}{2}+3x-3x^2$，所以 $H'(0)=H'(1)=1/2$。两个函数值和两个斜率都已满足。

4 由 Hermite 插值推导三次样条

> 利用 Hermite 公式推导三次样条，边界条件为 $m_0=m_n=0$。

1. 把整条样条拆成若干小段

记 $m_i=S'(x_i)$、$h_i=x_{i+1}-x_i$、$\delta_i=(y_{i+1}-y_i)/h_i$。在第 i 段取 $z=x-x_i$，写成 $S_i=y_i+m_iz+c_iz^2+d_iz^3$。这已经满足左端函数值和斜率。

2. 用右端条件求出每段的系数

令 $z=h_i$，要求 $S_i(x_{i+1})=y_{i+1}$、$S_i'(x_{i+1})=m_{i+1}$。将第一个条件除以 h_i 后，两式为

$$c_ih_i+d_ih_i^2=\delta_i-m_i, \qquad 2c_ih_i+3d_ih_i^2=m_{i+1}-m_i.$$

第二式减两倍第一式可先求 d_i。代回得到

$$c_i=\frac{3\delta_i-2m_i-m_{i+1}}{h_i}, \qquad d_i=\frac{m_i+m_{i+1}-2\delta_i}{h_i^2}.$$

3. 让接缝两侧的二阶导数相等

相邻两段在 x_i 已共享 y_i 和 m_i，因此函数和一阶导数连续。对第 i 段求导两次得到 $S_i''=2c_i+6d_iz$，所以

$$\begin{aligned} S_i''(x_i) &= \frac{6\delta_i-4m_i-2m_{i+1}}{h_i}, \\ S_i''(x_{i+1}) &= \frac{-6\delta_i+2m_i+4m_{i+1}}{h_i}. \end{aligned}$$

令左段右端的 $S_{i-1}''(x_i)$ 等于右段左端的 $S_i''(x_i)$，乘 $h_{i-1}h_i$ 并合并同一个斜率的系数。

$$h_im_{i-1}+2(h_{i-1}+h_i)m_i+h_{i-1}m_{i+1}=3(h_i\delta_{i-1}+h_{i-1}\delta_i).$$

4. 加上边界条件，求出所有分段

题给 $m_0=m_n=0$，即两端斜率为零。每个内节点的方程只涉及本节点和左右相邻节点，合起来是严格对角占优的三对角系统。解出 $m_1,\dots,m_{n-1}$，再用第 2 步的系数写出各段，得到唯一的 C^2 三次样条。

5　四节点夹持样条

> 节点 $x_i=(1,2,4,5)$，函数值 $y_i=(1,3,4,2)$，求满足 $m_0=m_3=0$ 的三次样条 $S(x)$。

1. 算出每小段的长度和割线斜率

从 $[1,2]$、$[2,4]$、$[4,5]$ 依次算得 $h=(1,2,1)$。函数值的增量为 $2,1,-2$，各自除以段长，得到 $\delta=(2,1/2,-2)$。两端斜率已经给定，实际只需求 $m_1=S'(2)$ 和 $m_2=S'(4)$。

2. 在两个内节点分别列方程

按题 4 的公式，在 $x=2$ 左右的长度是 1、2，在 $x=4$ 左右的长度是 2、1。去掉乘 m_0、m_3 的项后，有

$$\begin{aligned} 6m_1+m_2 &= 3(2\cdot 2+1\cdot\tfrac{1}{2})=27/2,\\ m_1+6m_2 &= 3(1\cdot\tfrac{1}{2}+2\cdot(-2))=-21/2. \end{aligned}$$

第一式乘 6 后减第二式得到 $35m_1=183/2$，所以 $m_1=183/70$。再用第一式求得 $m_2=-153/70$。

3. 把斜率代回每段的 Hermite 多项式

以第一段为例，$z=x-1$、$h_0=1$、$\delta_0=2$。二次项系数为 $6-m_1=237/70$，三次项系数为 $m_1-4=-97/70$。同样代入后两段，得到

区间	$S(x)$
$[1,2]$，$z=x-1$	$1+\frac{237}{70}z^2-\frac{97}{70}z^3$
$[2,4]$，$z=x-2$	$3+\frac{183}{70}z-\frac{27}{35}z^2-\frac{1}{7}z^3$
$[4,5]$，$z=x-4$	$4-\frac{153}{70}z-\frac{57}{35}z^2+\frac{127}{70}z^3$

4. 检查接缝和端点斜率

节点函数值依次为 $1,3,4,2$，两端斜率均为零。以 $x=2$ 为例，第一段取 $z=1$，二阶导数为 $2(237/70)+6(-97/70)=-54/35$。第二段取 $z=0$，二阶导数也为 $-54/35$。在 $x=4$ 同样检查，左右值均为 $-114/35$。

6　推导最小二乘法

> 阐述最小二乘法的推导过程。

1. 先写出要最小化的量

以拟合直线 $\hat{y}_i=a+bx_i$ 为例，每个点的竖直残差为 $r_i=y_i-a-bx_i$。最小二乘把这些残差平方相加，得到 $Q(a,b)=\sum_i r_i^2$，再挑选使 Q 最小的 a,b。

2. 分别对截距和斜率求偏导

由链式法则，$\partial_a r_i=-1$，$\partial_b r_i=-x_i$，所以

$$\partial_a Q=-2\sum_i r_i,\qquad \partial_b Q=-2\sum_i x_i r_i.$$

将两式置零，代回残差并整理。设有 N 个数据点，就得到正规方程

$$Na+b\sum_i x_i=\sum_i y_i,\qquad a\sum_i x_i+b\sum_i x_i^2=\sum_i x_i y_i.$$

3. 从正规方程解系数

先用第一式得到 $a=\bar y-b\bar x$。代入第二式，得到 $b(\sum_i x_i^2-N\bar x^2)=\sum_i x_iy_i-N\bar x\bar y$。只要 x_i 至少有两个不同值，左边括号就大于零，因此

$$b=\frac{\sum_i(x_i-\bar x)(y_i-\bar y)}{\sum_i(x_i-\bar x)^2},\qquad a=\bar y-b\bar x.$$

4. 说明解确实给出最小值

一般线性模型记为 Xa。设 a_* 满足正规方程，则 $r_*=y-Xa_*$ 与 X 的各列正交。改变系数为 a_*+d 时，残差变为 r_*-Xd。这两个分量正交，因此平方和变成 $\|r_*\|^2+\|Xd\|^2$，至少等于原来的平方和。X 满列秩时，只有 $d=0$ 才能取等号。

7　直线与指数拟合

> 用最小二乘法及模型 $y=a+bx$、$y=ae^{bx}$ 分别拟合下列数据。
>
> | x_i | 1.00 | 1.25 | 1.50 | 1.75 | 2.00 |
> |---|---|---|---|---|---|
> | y_i | 5.10 | 5.79 | 6.53 | 7.45 | 8.46 |

1. 直线拟合先整理数据

五个点的数据给出 $\sum x=7.5$、$\sum y=33.33$、$\sum x^2=11.875$、$\sum xy=52.09$。代入题 6 的正规方程：

$$5a+7.5b=33.33,\qquad 7.5a+11.875b=52.09.$$

2. 消去直线的截距

第二式减去第一式的 1.5 倍，得到 $0.625b=2.095$。于是 $b=3.352$，代回第一式得 $a=1.638$，拟合直线为 $\hat y=1.638+3.352x$。

3. 将指数关系转化成直线

所有 y_i 都为正。按课件做法取 $Y_i=\ln y_i$、$A=\ln a$，将 $y=ae^{bx}$ 写成 $Y=A+bx$，这时仍可使用同一套正规方程。保留计算精度，有 $\sum Y\approx 9.405343$、$\sum xY\approx 14.424089$。

4. 求对数尺度的系数并换回原模型

消元的分母仍是 $11.875-7.5^2/5=0.625$。替换右端数据后，

$$b=\frac{\sum xY-1.5\sum Y}{0.625}\approx 0.505720,$$
$$A=\frac{\sum Y-7.5b}{5}\approx 1.122489.$$

截距 A 是 $\ln a$，所以 $a=e^A\approx 3.072493$，最终 $\hat y\approx 3.072493e^{0.505720x}$。这套算法最小化的是 $\sum_i(Y_i-A-bx_i)^2$，即对数残差平方和。

8　全主元消去法与三元例题

> 说明全主元消去法的思路与步骤，并用三元一次线性方程组举例。

1. 明确选主元的范围

第 k 轮只看尚未消元的系数子块 a_{ij}（$i,j\ge k$），找绝对值最大的系数。把它换到 (k,k)。交换行时右端一起换，交换系数列时记下新的变量顺序。随后用该行为主元行消去主元下方的元素，再处理更小的子块。

2. 在例题中选出第一个主元 5

取左侧的增广矩阵。5 在第 2 行、第 3 列，先换行 $1,2$，再换系数列 $1,3$。变量变为 (x_3,x_2,x_1)，得到右侧矩阵。

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right].$$

第三行的首项为 1，做 $R_3-\frac{1}{5}R_1$，得到 $(0,-2/5,2\mid 11/5)$。第二行首项已经为零。

3. 在剩余子块中选第二个主元 2

此时右下角 2×2 系数里，最大绝对值是第 3 行、第 3 列的 2。交换行 $2,3$ 及列 $2,3$，变量变为 (x_3,x_1,x_2)。新第三行是 $(0,1,1\mid 3)$，减去新第二行的 $1/2$，得到

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -2/5 & 11/5 \\ 0 & 0 & 6/5 & 19/10 \end{array}\right].$$

4. 从最后一行回代并恢复变量顺序

末行给出 $x_2=(19/10)/(6/5)=19/12$。第二行给出 $x_1=(11/5+2x_2/5)/2=17/12$。第一行给出 $x_3=(4-2x_2)/5=1/6$。按原顺序写为 $(17/12,19/12,1/6)$，代回原三行的右端依次为 $3,4,3$。

9　列主元与全主元两种求解

> 用列主元和全主元消元法分别求解。
>
> $$\begin{cases} 3x_1+2x_2+5x_3=1 \\ 2x_1+7x_2+2x_3=9 \\ 3x_1-4x_2+x_3=6. \end{cases}$$

1. 列主元法：在第一列选 3，消去下方两项

第一列的系数是 $3,2,3$。两个 3 并列，取第一行。做 $R_2-\frac{2}{3}R_1$ 和 R_3-R_1，得到

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 17/3 & -4/3 & 25/3 \\ 0 & -6 & -4 & 5 \end{array}\right].$$

2. 列主元法：在第二列选 -6，再回代

因为 $6>17/3$，交换第 2、3 行。新第三行需要减去新第二行的 $-17/18$ 倍，得到

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -6 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -46/9 & 235/18 \end{array}\right].$$

末行得 $x_3=(235/18)/(-46/9)=-235/92$。回到第二行算得 $x_2=(5+4x_3)/(-6)=20/23$，再用第一行得 $x_1=(1-2x_2-5x_3)/3=369/92$。

3. 全主元法：在全体系数中选 7

7 在第 2 行、第 2 列，交换行 $1,2$ 和列 $1,2$。变量次序变为 (x_2, x_1, x_3)。先用首行乘子 $2/7, -4/7$ 消去首列下方的 $2, -4$。

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 2 & 2 & 9 \\ 0 & 17/7 & 31/7 & -11/7 \\ 0 & 29/7 & 15/7 & 78/7 \end{array}\right].$$

4. 全主元法：选 $31/7$，跟着新的变量顺序回代

剩余子块最大绝对值为第二行第三列的 $31/7$。交换列 $2,3$，次序成为 (x_2, x_3, x_1)。第三行减第二行的 $15/31$ 倍，得到

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 2 & 2 & 9 \\ 0 & 31/7 & 17/7 & -11/7 \\ 0 & 0 & 92/31 & 369/31 \end{array}\right].$$

现在末行对应 x_1，先求 $x_1 = (369/31)/(92/31) = 369/92$。第二行解 $x_3 = (-11 - 17x_1)/31 = -235/92$，首行解 $x_2 = (9 - 2x_3 - 2x_1)/7 = 20/23$。按原顺序写回，两种方法均得 $(369/92,\ 20/23,\ -235/92)$。

---

10 高斯消元与 LU（一）

用高斯消元和 LU 分解求解。

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 12x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 15 \\ -18x_1 + 3x_2 - x_3 = -15. \end{cases}$$

1. 高斯消元：先消首列，再消第二列

第一行首项为 1。用 $R_2 - 12R_1$ 和 $R_3 + 18R_1$ 后，第二、三行变为 $(0, -15, -9 \mid -57)$、$(0, 21, 17 \mid 93)$。第二列的乘子为 $21/(-15) = -7/5$，做 $R_3 + \frac{7}{5}R_2$。

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -15 & -9 & -57 \\ 0 & 0 & 22/5 & 66/5 \end{array}\right].$$

2. 高斯消元：从下往上回代

第三行给出 $x_3 = (66/5)/(22/5) = 3$。第二行给出 $-15x_2 = -57 + 9(3) = -30$，所以 $x_2 = 2$。第一行给出 $x_1 = 6 - 2 - 3 = 1$。

3. LU 分解：把消元乘子和结果分别放入 L, U

由于消元过程中没有交换行，消元的上三角系数直接是 U。乘子 $12, -18, -7/5$ 分别放入 L 的 $(2,1), (3,1), (3,2)$ 位置。注意用乘子本身，例如做 $R_3 + 18R_1$ 对应的乘子是 -18。

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 12 & 1 & 0 \\ -18 & -7/5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -15 & -9 \\ 0 & 0 & 22/5 \end{pmatrix}.$$

4. LU 分解：先前代求 y，再回代求 x

令 $y = Ux$，原方程变成 $Ly = b$。按第一、二、三行求 $y_1 = 6$、$y_2 = 15 - 12(6) = -57$、$y_3 = -15 + 18(6) + \frac{7}{5}(-57) = 66/5$。$Ux = y$ 正是第 1 步的上三角系统，因此回代得到 $x = (1, 2, 3)^{\mathsf{T}}$。

11 高斯消元与 LU（二）

> 用高斯消元和 LU 分解求解。
>
> $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 10x_3 = 0 \\ 3x_1 - 0.1x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

1. 高斯消元：用分数保留计算精度

将 -0.1 写成 $-1/10$。首列的乘子是 5 和 3。做 $R_2 - 5R_1$ 后为 $(0, -6, -5 \mid -5)$，做 $R_3 - 3R_1$ 后为 $(0, -61/10, -8 \mid -1)$。

2. 高斯消元：算最后一行并回代

第二次乘子为 $(-61/10)/(-6) = 61/60$。第三行减去第二行的 $61/60$ 倍后，最后一个系数为 $-8 + 5(61/60) = -35/12$，右端为 $-1 + 5(61/60) = 49/12$。

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -35/12 & 49/12 \end{array}\right].$$

末行得 $x_3 = (49/12)/(-35/12) = -7/5$。第二行得 $x_2 = (-5 + 5x_3)/(-6) = 2$。第一行得 $x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3 = 6/5$。

3. LU 分解：根据消元结果写出两个因子

将 $5, 3, 61/60$ 依次填入 L 的 $(2,1), (3,1), (3,2)$ 位置，U 取上三角系数。

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 61/60 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & -35/12 \end{pmatrix}.$$

4. LU 分解：分别解两个三角系统

$Ly = b$ 从上往下算，得到 $y_1 = 1$、$y_2 = 0 - 5(1) = -5$、$y_3 = 2 - 3(1) - \frac{61}{60}(-5) = 49/12$。把它们作为 $Ux = y$ 的右端，从下往上回代，得到 $x = (6/5, 2, -7/5)^{\mathsf{T}}$。

---

12 比较两种定常迭代

> 简述 Jacobi 与 Gauss–Seidel 的求解思路及步骤，说明区别。

1. 把每个方程改写成一个分量的更新式

安排方程顺序，使对角系数 $a_{ii} \neq 0$。从第 i 个方程解出 $x_i = (b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j)/a_{ii}$，并选定初始向量 $x^{(0)}$。两种方法用的是同一条更新公式，区别在于右端读取哪一轮的值。

2. Jacobi：所有右端项读上一轮

$$x_{i,\mathrm{J}}^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_{j,\mathrm{J}}^{(k)}}{a_{ii}}.$$

可以先保留一份完整的旧向量，各分量独立计算，全部算出后再整体换成新向量。

3. Gauss–Seidel：算出的新分量立刻使用

$$x_{i,\mathrm{GS}}^{(k+1)}=\frac{b_i-\sum_{j<i}a_{ij}x_{j,\mathrm{GS}}^{(k+1)}-\sum_{j>i}a_{ij}x_{j,\mathrm{GS}}^{(k)}}{a_{ii}}.$$

例如同一轮算 x_2 时，x_1 已经更新，用新 x_1。x_3 尚未更新，用旧 x_3。因此这一方法按指定分量顺序推进。

4. 按题意停止或检查残差

题目规定轮数时，完成相应轮数即可。求近似解时，可计算残差 $b-Ax^{(k)}$ 并与给定容差比较。两种方法各有自己的迭代矩阵，能否对任意初值收敛由各自的谱半径是否小于 1 决定。

---

13 对题 9 做三轮迭代

> 用 Jacobi 和 Gauss–Seidel 迭代求题 9 的方程组，按需要调整主元，从 $x^{(0)}=(0,0,0)^{\mathsf{T}}$ 出发，各列三轮迭代表。

1. 重排方程并分离对角变量

按原第 $3,2,1$ 行排序，使依次解出的 x_1,x_2,x_3 的系数为 $3,7,5$。变量下标仍取原来的次序，由三行分别解出

$$x_1=\frac{6+4x_2-x_3}{3},\quad x_2=\frac{9-2x_1-2x_3}{7},\quad x_3=\frac{1-3x_1-2x_2}{5}.$$

2. Jacobi：一整轮都代入旧值

由 $(0,0,0)$ 得第一轮 $(6/3,\ 9/7,\ 1/5)$。算第二轮时，三式右端都读这组第一轮的结果。例如

$$\begin{aligned}x_1^{(2)}&=[6+4(9/7)-1/5]/3=383/105,\\ x_2^{(2)}&=[9-2(2)-2(1/5)]/7=23/35,\\ x_3^{(2)}&=[1-3(2)-2(9/7)]/5=-53/35.\end{aligned}$$

将第二轮完整向量代回三式得到第三轮。例如 $x_1^{(3)}=[6+4(23/35)+53/35]/3=71/21$。按小数记录如下，计算时可保留分数。

k	x_1	x_2	x_3
0	0	0	0
1	2.000000	1.285714	0.200000
2	3.647619	0.657143	−1.514286
3	3.380952	0.676190	−2.251429

3. Gauss–Seidel：依次用刚算出的新分量

从全零开始，先算 $x_1^{(1)} = 2$，再用这个 2 和旧 $x_3^{(0)} = 0$ 算 $x_2^{(1)} = (9-4)/7 = 5/7$。最后用两个新分量算 $x_3^{(1)} = [1 - 6 - 2(5/7)]/5 = -9/7$。第二轮同理：

$$
\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= [6 + 4(5/7) + 9/7]/3 = 71/21, \\
x_2^{(2)} &= [9 - 2(71/21) + 18/7]/7 = 101/147, \\
x_3^{(2)} &= [1 - 3(71/21) - 2(101/147)]/5 = -1546/735.
\end{aligned}
$$

第三轮依旧按 x_1, x_2, x_3 的顺序。先算 $x_1^{(3)} = [6 + 4(101/147) + 1546/735]/3 = 7976/2205$，马上用这个值算 $x_2^{(3)}$。各轮结果如下。

k	x_1	x_2	x_3
0	0	0	0
1	2.000000	0.714286	−1.285714
2	3.380952	0.687075	−2.103401
3	3.617234	0.853191	−2.311616

4. 用精确解和谱半径核对

题 9 的精确解约为 $(4.010870, 0.869565, -2.554348)$，表中的第三轮值是题目要求的近似结果。重排后的 Jacobi 和 Gauss–Seidel 迭代矩阵的谱半径分别约为 0.595677、0.533333，都小于 1。原行序的谱半径分别约为 2.159849、5.854781，所以先重排再迭代很重要。

后四次课 · 吴克俭

数值模拟 · 核心考点

从微分方程到差分网格，再从海洋时间序列提取波动与统计特征。

偏微分方程、差分与适定性

第一次课程，第 5–45 页

方程与定解条件

适定问题具有解、解唯一，且解连续依赖初值、边界值等给定数据。对二维二阶标量方程的主部 $Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}$，按 B^2-AC 的正、零、负判为双曲、抛物、椭圆型。若混合项写成 Bu_{xy}，判别式改写为 B^2-4AC。

波动方程 $u_{tt}=c^2u_{xx}$、热方程 $u_t=\kappa u_{xx}$、Laplace 方程 $u_{xx}+u_{yy}=0$ 分属三类。Dirichlet 条件给 u，Neumann 条件给法向导数 $\partial_n u$，Robin 条件给 $\alpha u+\beta\partial_n u$。

在整条实线上，一维波动方程可写成左右两个行波之和。初位移为 f、初速度为零时，$u(x,t)=[f(x-ct)+f(x+ct)]/2$。分别求两次偏导可验证方程，再令 $t=0$ 检查两条初值。

用 Taylor 展开构造差分

设均匀网格步长为 h。将 $u(x\pm h)$ 在 x 展开。前向与后向一阶差分的截断误差一般为 $O(h)$，对称取点消去低阶的误差项。

$$\frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}=u'(x)+\tfrac{h^2}{6}u'''(x)+O(h^4),$$
$$\frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}=u''(x)+\tfrac{h^2}{12}u^{(4)}(x)+O(h^4).$$

推导可保留足够阶的连续导数。写差分格式时先明确离散时间层与空间下标，再代入偏导数的近似式。

相容、稳定与收敛

相容指把精确解代入离散方程得到的截断残差随网格细化趋零。稳定控制给定时间区间内离散扰动的增长。收敛指格点数值解趋近精确解。在线性适定初值问题及相容的线性差分近似下，Lax 等价定理给出稳定性与收敛性的等价关系。

常系数线性格式在无限网格或周期网格上可用 Fourier 模态考察放大因子。边界条件会改变更新矩阵，可据其幂的有界性分析离散扰动。

> 训练重点。用 Taylor 展开证明差分阶数，分别解释截断误差与计算误差。

扩散、对流与特征线

第二次课程，第 2–32 页 · 1_特征线方程，第 1–2 页

一维扩散方程

设 $u_t=\kappa u_{xx}$、$\kappa>0$，网格步长 h、时间步长 τ，扩散数 $r=\kappa\tau/h^2$。记 $\delta^2U_j=U_{j+1}-2U_j+U_{j-1}$。

$$U_j^{n+1}=rU_{j-1}^n+(1-2r)U_j^n+rU_{j+1}^n \quad \text{(FTCS)},$$
$$U_j^{n+1}-r\delta^2U_j^{n+1}=U_j^n \quad \text{(Backward Euler)},$$
$$U_j^{n+1}-\tfrac{r}{2}\delta^2U_j^{n+1}=U_j^n+\tfrac{r}{2}\delta^2U_j^n \quad \text{(Crank–Nicolson)}.$$

显式格式可逐点推进。后两式每层解三对角方程组。FTCS 和全隐式的一般精度为 $O(\tau + h^2)$，Crank–Nicolson 为 $O(\tau^2 + h^2)$。一维常系数 Fourier 分析给出 FTCS 稳定条件 $0 \le r \le 1/2$，后两者在 $r \ge 0$ 时无条件稳定。

扩散的 θ 格式将新旧层空间二阶差分按 $\theta, 1-\theta$ 加权。Richardson 三层显式格式将时间导数取中心差分，对扩散方程不稳定。DuFort–Frankel 格式将中心项替换为跨时间层的均值，截断残差含 $O((\tau/h)^2)$ 项，相容性要求 $\tau/h \to 0$。

边界处理

端点给温度时按时间层代入。若左端给 $u_x(0,t) = g(t)$，可用中心差分得到虚点 $U^n_{-1} = U^n_1 - 2hg(t_n)$。代回扩散方程边界差分。全隐式对应 $(1+2r)U^{n+1}_0 - 2rU^{n+1}_1 = U^n_0 - 2rhg(t_{n+1})$。右端按同一方法消去右虚点。若数据给的是外法向导数，左端有 $\partial_n = -\partial_x$。

对流方程与迎风差分

对 $u_t + au_x = 0$，取 $dx/dt = a$，链式法则给 $du/dt = 0$，故 $u(x,t) = \phi(x - at)$。有限区间上，$a > 0$ 时左侧是入流端，$a < 0$ 时右侧是入流端。

令 $C = a\tau/h$。对 $a > 0$，迎风格式为 $U^{n+1}_j = (1-C)U^n_j + CU^n_{j-1}$，稳定条件 $0 \le C \le 1$。$a < 0$ 时使用右邻点，以 $|C|$ 为权，要求 $|C| \le 1$。向前时间加中心空间的对流格式对任意非零 C 均存在放大的 Fourier 模态。

沿特征从 (x_j, t_{n+1}) 回溯到 $x_j - a\tau$，再用旧层两相邻节点插值。脚点在相邻上游单元内时，线性插值恰好给上述迎风式。变速 $dx/dt = b(x)$ 时，可先用 $x_j - b(x_j)\tau$ 近似脚点。

> 训练重点。从解析解验证对流方向，从放大因子推出稳定限制，再手算一步。

波动、Fourier 谱、小波与 EMD

第二次课程，第 33–43 页 · 第三次课程，第 2–69 页 · EMD 方法附件

重力波与频散

波形 $\eta = A\sin(kx - \omega t)$ 有 $k = 2\pi/\lambda$, $\omega = 2\pi/T$。相速度 $c_p = \omega/k$，群速度 $c_g = d\omega/dk$。线性重力波在水深 H 下满足 $\omega^2 = gk\tanh(kH)$。

深水 $kH \gg 1$ 时 $\omega \approx \sqrt{gk}$，$c_p \approx \sqrt{g/k}$，$c_g \approx c_p/2$。浅水 $kH \ll 1$ 时 $\omega \approx k\sqrt{gH}$，两种速度均约为 $\sqrt{gH}$。数值频散指离散格式造成的相速随波数变化，可使波形失真。

Fourier 变换与谱

取 $\hat f(\omega) = \int f(t)e^{-i\omega t}dt$，逆变换的系数为 $1/(2\pi)$。平移产生相位因子，微分变成乘法，卷积变成频域的乘积。

$$\widehat{f(t-t_0)} = e^{-i\omega t_0}\hat f(\omega), \qquad \widehat{f^{(m)}} = (i\omega)^m \hat f(\omega),$$
$$\widehat{f * g} = \hat f\,\hat g, \qquad \int_{\mathbb R} |f|^2 dt = \tfrac{1}{2\pi}\int_{\mathbb R} |\hat f|^2 d\omega.$$

对 N 个等间隔样本，DFT 系数为 $X_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-2\pi i jk/N}$。采样间隔为 Δt 时，频率间距为 $1/(N\Delta t)$，Nyquist 频率为 $1/(2\Delta t)$。对平稳实过程，协方差与谱密度互为 Fourier 对应，按归一化后谱对全频积分等于总方差。用双边谱 S 且约定 $R(\tau) = \int S(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$ 时，总方差为 $R(0) = \int S\,d\omega$。

小波与经验模态分解

小波用伸缩和平移后的局域波形 $\psi_{a,b}(t) = a^{-1/2}\psi((t-b)/a)$ 与信号作内积，刻画某一时刻附近的尺度结构。较小尺度对应较短的分析波形。

EMD 筛分时找极值点、用三次样条构造上下包络、减包络均值、继续筛分得到 IMF，再从余项提取后续 IMF。IMF 满足极值点数与过零点数至多相差 1，以及上下包络的局部均值为零。信号由各 IMF 与残余项重构。端点缺少极值会使包络失真，间歇信号可能造成模态混合。对 IMF 作 Hilbert 变换可构造解析信号，由相位的时间导数得到瞬时角频率。

> 训练重点。用分部积分证明微分性质，解释方差与谱面积的关系，复述 IMF 两条条件。

概率分布与平稳随机过程

第四次课程，第 2–21 页

事件、随机变量与矩

经验频率 k/N 估计事件概率。$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$。当 $P(A)>0$ 时，$P(B\mid A)=P(A\cap B)/P(A)$。独立事件满足 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$。

分布函数用 $F_X(x)=P(X\le x)$。超过概率 $P(X>x)=1-F_X(x)$。对连续变量，$P(X\ge x)=P(X>x)$。对离散变量，$P(X\ge x)=1-F_X(x^-)$。

期望 $\mu=E[X]$，方差 $\sigma^2=E[(X-\mu)^2]=E[X^2]-\mu^2$。$r$ 阶原点矩和中心矩分别为 $E[X^r]$ 和 $E[(X-\mu)^r]$。变差系数 $C_v=\sigma/\mu$（$\mu>0$），偏态系数 $\gamma_1=E[(X-\mu)^3]/\sigma^3$（$\sigma>0$）。

$$\operatorname{Cov}(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y],\qquad \rho_{XY}=\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}.$$

独立且二阶矩有限时协方差为零。零相关仍允许非线性依赖。

常见分布

正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 可用 $Z=(X-\mu)/\sigma$ 标准化。若 $Y=\ln X\sim N(\mu_Y,\sigma_Y^2)$，则 X 为对数正态，$f_X(x)=\exp[-(\ln x-\mu_Y)^2/(2\sigma_Y^2)]/(x\sigma_Y\sqrt{2\pi})$，定义在 $x>0$。Pearson III 型可写成 $X=a_0+Y$，其中 Y 服从 Gamma 分布，采用形状 α 与率 β 时 $E[X]=a_0+\alpha/\beta$。

平稳随机过程

固定时刻的 $X(t)$ 是随机变量，固定一次观测得到样本函数。宽平稳要求二阶矩有限、均值为常数，且 $C_X(t,t+\tau)=C_X(\tau)$ 只依赖时差。取 $\tau=0$ 得方差恒定。严格平稳要求任意有限维联合分布在时间平移下不变。

> 训练重点。会由随机相位直接计算均值和协方差，用 $C_X(0)$ 检查方差。

数值模拟 • 14 题

配套练习与解析

题目按偏微分方程、扩散与对流、时频分析、概率统计排列。

1　分类与三类边界条件

> 分别判断 $u_{xx}-4u_{yy}=0$、$u_t-\kappa u_{xx}=0$（$\kappa>0$）、$u_{xx}+u_{yy}=0$ 的类型，说明三类常用边界条件。

1. 取出二阶主部

把二阶项写成 $Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}$，计算 $\Delta=B^2-AC$。对热方程用 (x,t) 作两个自变量，此时第二个纯二阶项是 u_{tt}。u_t 是一阶项，在分类时只取二阶项。

2. 根据 Δ 的符号分类

第一式的 $(A,B,C)=(1,0,-4)$，$\Delta=4>0$，是双曲型。热方程的二阶项系数为 $(-\kappa,0,0)$，$\Delta=0$，是抛物型。第三式的系数为 $(1,0,1)$，$\Delta=-1<0$，是椭圆型。

3. 看边界上具体给定什么

Dirichlet 条件给函数值，例如端点温度 $u=20$。Neumann 条件给法向导数，例如绝热边界的 $\partial_n u=0$。Robin 条件给两者的线性组合，例如 $\alpha u+\beta\partial_n u=g$。边界条件和初始条件一起决定要解的具体问题。

2　证明中心二阶差分为二阶精度

> 从 Taylor 展开证明 $(u(x+h)-2u(x)+u(x-h))/h^2$ 近似 $u''(x)$ 的截断误差为 $O(h^2)$，给出首项。

1. 在同一个点写出两侧的 Taylor 展开

设 u 在 x 附近有连续的六阶导数。下式右端的函数和各阶导数都在 x 处取值。

$$\begin{aligned}u(x\pm h)=u\pm hu'+\tfrac{h^2}{2}u''\pm\tfrac{h^3}{6}u'''\\+\tfrac{h^4}{24}u^{(4)}\pm\tfrac{h^5}{120}u^{(5)}+O(h^6).\end{aligned}$$

2. 相加并去掉常数项

两式相加时，一、三、五阶项的系数一正一负，全部抵消。常数项加成 $2u$，再减 $2u$ 后，分子为 $h^2u''+\frac{h^4}{12}u^{(4)}+O(h^6)$。

3. 除以 h^2，读出截断误差

$$\frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}=u''(x)+\frac{h^2}{12}u^{(4)}(x)+O(h^4).$$

按“差分近似减精确导数”定义误差，首项就是 $h^2u^{(4)}(x)/12$。阶数由除以 h^2 后的误差决定，所以这是二阶近似。

3　相容性能否推出收敛

> 给出相容、稳定与收敛的定义，并说明 Lax 等价定理的前提和结论。举出一个相容但不稳定的差分格式。

1. 区分三个概念各自比较的对象

相容是把精确解代入差分方程，看留下的截断残差是否随网格细化趋于零。稳定看输入或计算扰动随时间推进会放大多少，要求在固定时间区间内有与网格无关的控制。收敛比较差分方程算出的格点值和精确解在同一格点的值，两者之差应随网格细化趋于零。

2. 写清 Lax 等价定理的前提

对线性适定初值问题，其相容的线性差分近似稳定当且仅当收敛。因此检查过相容性后，还要检查扰动是否受控制。

3. 让扩散 FTCS 保持相容，再看噪声如何变化

令 $r = \kappa\tau/h^2 = 0.6$，网格变细时取 $\tau = 0.6h^2/\kappa$。光滑精确解代回格式的截断残差为 $O(\tau + h^2)$，所以趋于零。

在无限均匀网格上，考虑相邻节点正负交替的扰动 $(-1)^j$。每一格的左右邻点都是本格的相反数，代入 FTCS 得一轮的放大因子 $(1 - 2r) - 2r = 1 - 4r = -1.4$。负号使它每步翻转，绝对值 1.4 使幅值增长。这就给出了相容但不稳定的格式。

4　推导对流方程的特征线解

> 求 $u_t - 2u_x = 0$，$u(x, 0) = \cos x$ 的解，说明波形移动的方向。若计算域为 $[0, 1]$，指出入流边界。

1. 让移动速度配合方程

沿曲线 $x(t)$ 观察 $u(x(t), t)$，由链式法则 $du/dt = u_t + x'(t)u_x$。取 $x'(t) = -2$ 后，右端正好是方程左侧 $u_t - 2u_x = 0$。因此沿这条曲线走，u 保持常数。

2. 回到初始时刻查出这个常数

若曲线从 $x(0) = \xi$ 出发，则 $x(t) = \xi - 2t$。一个点 (x, t) 的初始脚点为 $\xi = x + 2t$，那里已知 $u(\xi, 0) = \cos\xi$。所以

$$u(x, t) = \cos(x + 2t).$$

代入 $t = 0$ 恢复初值，求偏导也可检查 $u_t - 2u_x = 0$。

3. 用同一相位判断方向和入流端

固定波峰的相位 $x + 2t =$ 常数，随时间增加，x 以速度 2 减小。因此波形向左平移。在 $[0, 1]$ 中，特征线从右端 $x = 1$ 进入，从左端离开，入流边界是 $x = 1$。

5　扩散解析解与一步显式计算

> 求 $u_t = u_{xx}$ 在 $0 < x < 1$ 上满足两端为零、初值 $\sin(\pi x)$ 的解。另在某均匀网格上，取 $r = 1/4$，某内点旧层相邻三个值依次为 $1, 4, 3$，求该内点的新值。

1. 选一个符合初值形状的空间函数

初值 $\sin(\pi x)$ 在两端为零，且它对 x 求两次导数仍是同一形状，只多了一个因子 $-\pi^2$。所以试取 $u(x, t) = T(t)\sin(\pi x)$，由 $T(t)$ 描述振幅随时间怎样变化。

2. 用方程求振幅，再核对定解条件

代入 $u_t = u_{xx}$ 得 $T'(t)\sin(\pi x) = -\pi^2 T(t)\sin(\pi x)$。因此 $T' = -\pi^2 T$，且初值要求 $T(0) = 1$，解得 $T(t) = e^{-\pi^2 t}$。于是

$$u(x,t) = e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x).$$

$t = 0$ 时指数因子为 1，恢复给定初值。$x = 0, 1$ 时正弦项为零，满足两端条件。

3. 另按 FTCS 做一次格点更新

旧层左、中、右三点分别乘 $r, 1-2r, r$。取 $r = 1/4$ 后，中间权重为 $1/2$，所以新一层内点值是

$$U_j^{n+1} = \tfrac{1}{4}(1) + \tfrac{1}{2}(4) + \tfrac{1}{4}(3) = 3.$$

6　证明显式扩散的稳定条件

> 用 von Neumann 方法证明一维扩散 FTCS 的 Fourier 稳定条件为 $0 \le r \le 1/2$。

1. 用一个波形代表格点误差

在无限均匀网格上，取 $U_j^n = G^n e^{ij\theta}$。θ 是相邻节点之间的相位差，G 是每向前走一个时间步所乘的因子。左右邻点相对于中心节点分别多乘 $e^{-i\theta}$ 和 $e^{i\theta}$。

2. 将模态代入显式差分

消去各项共有的 $G^n e^{ij\theta}$，或者直接将这个函数看作差分更新算子的一个模态，得到

$$G = re^{-i\theta} + (1-2r) + re^{i\theta} = 1 - 4r\sin^2(\theta/2).$$

最后一步用了 $e^{-i\theta} + e^{i\theta} = 2\cos\theta$ 和 $1 - \cos\theta = 2\sin^2(\theta/2)$。

3. 检查变化最快的波数

物理上 $r \ge 0$。因为 $0 \le \sin^2(\theta/2) \le 1$，实数 G 介于 $1-4r$ 和 1 之间。要使所有模态满足 $|G| \le 1$，只需最低值满足 $1 - 4r \ge -1$，所以 $0 \le r \le 1/2$。若 $r > 1/2$，取 $\theta = \pi$ 就有 $|G| > 1$，交错误差会越算越大。

7　迎风差分与脚点插值

> 对 $u_t + 2u_x = 0$ 取 $h = 0.5$, $\tau = 0.125$。若旧层 $U_{j-1}^n = 1$, $U_j^n = 3$, $U_{j+1}^n = 7$，从特征脚点插值计算 U_j^{n+1}，并写出迎风系数。

1. 从新时刻向旧时刻回溯

对流速度 $a = 2$ 向右。沿特征线回到一个时间步前，相当于往左走 $a\tau = 2(0.125) = 0.25$。脚点 $x_* = x_j - 0.25$ 落在 $x_{j-1} = x_j - 0.5$ 与 x_j 之间，正好是中点。

2. 用夹住脚点的两个旧值插值

脚点到 x_j 的距离占整个小区间的比例为 $C = a\tau/h = 0.5$。因此旧值 U_{j-1}^n 的权重为 C，U_j^n 的权重为 $1 - C$。沿特征线函数值不变，得到

$$U_j^{n+1} \approx CU_{j-1}^n + (1-C)U_j^n = \tfrac{1}{2}(1) + \tfrac{1}{2}(3) = 2.$$

3. 对照迎风差分

把 u_x 用左侧向后差分近似，可得同一个更新。按左、中、右的顺序，迎风系数是 $(0.5, 0.5, 0)$。右邻点的权重为零，因为脚点由左侧两个节点夹住。

---

8 Neumann 边界与虚点

> 对 $u_t = \kappa u_{xx}$，左边界给 $u_x(0,t) = g(t)$。用中心差分消去虚点，写出左边界的 FTCS 更新。

1. 在左边界外引入一个虚点

左边界是 $x_0 = 0$，右边实点在 h，左边虚点在 $-h$。用对称两点近似边界的 x 方向导数，得到

$$\frac{U_1^n - U_{-1}^n}{2h} = g(t_n) \qquad \Longrightarrow \qquad U_{-1}^n = U_1^n - 2hg(t_n).$$

这里的 g 对应题中给定的 u_x，代入时沿用这个符号约定。

2. 将虚点从显式更新式中消去

把 FTCS 延伸到边界点 $j = 0$，其中 $r = \kappa\tau/h^2$。把左邻点替换为上一步的表达式：

$$\begin{aligned} U_0^{n+1} &= r[U_1^n - 2hg(t_n)] + (1-2r)U_0^n + rU_1^n \\ &= (1-2r)U_0^n + 2rU_1^n - 2rhg(t_n). \end{aligned}$$

3. 用零导数检查符号和系数

取 $g = 0$，虚点值等于右边实点值，所以两份相同的邻点贡献合成 $2rU_1^n$。若旧层还是常数 K，则新边界值为 $(1-2r)K + 2rK = K$，与恒定解相符。

---

9 证明 Fourier 微分性质

> 设 f 绝对连续，f, f' 可积，且 f 在无穷远衰减到零。证明 $\widehat{f'} = i\omega\hat{f}$，并说明空间 Fourier 变换如何简化热方程。

1. 写出微分后函数的 Fourier 变换

用 $\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$。要求的是在同一公式里用 $f'(t)$ 替换 $f(t)$，即变换积分 $\int_{\mathbb{R}} f'(t)e^{-i\omega t}\,dt$。

2. 分部积分，把导数转到指数因子上

指数因子的导数是 $-i\omega e^{-i\omega t}$。分部积分时积分项前还带一个减号，因此两个负号相消。

$$\widehat{f'} = \big[f(t)e^{-i\omega t}\big]_{-\infty}^{+\infty} + i\omega \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t}\,dt.$$

指数因子的模为 1，f 在两端衰减到零，方括号给零。于是 $\widehat{f'} = i\omega\hat{f}$。

3. 用这个性质把热方程化成常微分方程

在整条实线上只对空间 x 变换，记空间频率为 k。设解足够光滑并在空间无穷远衰减，使变换可与时间求导互换。空间求两次导数对应乘 $(ik)^2 = -k^2$，时间变量 t 保留下来。因此

$$\partial_t \hat{u}(k,t) = -\kappa k^2 \hat{u}(k,t), \qquad \hat{u}(k,t) = e^{-\kappa k^2 t}\hat{u}(k,0).$$

每个空间频率都单独满足一个一阶常微分方程。$|k|$ 越大，指数衰减越快。

10 深水与浅水的传播速度

> 从 $\omega^2 = gk\tanh(kH)$ 推导浅水和深水的相速度、群速度，并解释哪一种极限呈现频散。

1. 先认清两个速度的算法

取 $k > 0$ 和正频率分支。相速度 $c_p = \omega/k$ 跟踪单个波峰，群速度 $c_g = d\omega/dk$ 描述窄带波包的传播。计算时先在相应水深极限下化简 ω。

2. 浅水：$kH \ll 1$

用 $\tanh(kH) \approx kH$，得到 $\omega^2 \approx gHk^2$，即 $\omega \approx k\sqrt{gH}$。用 ω 除以 k 和对 k 求导，均得到 $\sqrt{gH}$。在这个近似下，各波数的相速度相同，属于非频散近似。

3. 深水：$kH \gg 1$

用 $\tanh(kH) \approx 1$，所以 $\omega \approx \sqrt{g}\,k^{1/2}$。除以 k 后得 $c_p \approx \sqrt{g/k}$，对 k 求导得 $c_g \approx \frac{1}{2}\sqrt{g/k}$。不同波数对应不同相速度，深水极限呈现频散。

11 为间歇振荡选择分析方法

> 一段潮位记录前半段出现短时高频振荡，后半段没有。全段 Fourier 谱、小波、EMD 分别能回答什么问题？写出 IMF 的两个判据。

1. 查整段记录含有哪些频率

全段 Fourier 幅值谱或功率谱可显示是否存在高频成分，以及它相对于低频成分有多强。谱上的每个频率量是从整段记录计算出来的。

2. 查高频从何时开始、何时结束

小波用局部波形在时间上滑动，并用不同尺度匹配长短不同的振荡。较小尺度的系数若主要在记录前半段较大，就能把这次短时高频活动定位在前半段。

3. 从信号数据中筛出振荡分量

EMD 从局部极大值和极小值构造上下包络，减去包络均值并反复筛分，从原信号中提取 IMF。判断一个分量是否为 IMF，要检查两点。第一，极值点数与过零点数相差至多 1。第二，在各处，上下包络的均值为零。遇到强间歇信号时，也要考虑不同尺度被筛到同一分量的情形。

12 超过概率、期望与方差

> 随机变量 X 取 $0, 1, 2$，概率分别为 $0.2, 0.5, 0.3$。求 $P(X \geq 1)$、$P(X > 1)$、期望与方差。

1. 逐个写出满足阈值的取值

$X \geq 1$ 包含 $X = 1$ 和 $X = 2$，所以 $P(X \geq 1) = 0.5 + 0.3 = 0.8$。$X > 1$ 只包含 $X = 2$，所以 $P(X > 1) = 0.3$。两个答案刚好相差 $P(X = 1) = 0.5$。

2. 用各点概率作权重求期望

$$E[X] = 0(0.2) + 1(0.5) + 2(0.3) = 1.1.$$

3. 先平方取值，再求方差

二阶原点矩是平方之后再取平均：

$$E[X^2] = 0^2(0.2) + 1^2(0.5) + 2^2(0.3) = 1.7.$$

代入 $\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$，得到 $1.7 - 1.1^2 = 0.49$。

---

13 证明随机相位余弦宽平稳

> 设 $X(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$，$A, \omega$ 为常数，Φ 在 $[0, 2\pi)$ 上均匀分布。求均值、方差及自协方差，判断宽平稳性。

1. 固定时刻，只对随机相位平均

Φ 在一整圈上均匀分布，对应的密度为 $1/(2\pi)$。固定 t 后，余弦波只发生相位平移，整圈平均仍为零。

$$E[X(t)] = \frac{A}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\omega t + \phi)\, d\phi = 0.$$

2. 展开两个时刻的乘积

均值为零，所以协方差就是 $E[X(t)X(t+\tau)]$。用积化和差公式：

$$X(t)X(t+\tau) = \tfrac{A^2}{2}[\cos(\omega\tau) + \cos(2\omega t + \omega\tau + 2\Phi)].$$

第一项与相位无关，取平均后保留。第二项中的 2Φ 扫过两个完整周期，平均为零。因此 $C_X(t, t+\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega\tau)$。

3. 令时差为零，再判断平稳性

取 $\tau = 0$，协方差变成方差，得到 $\mathrm{Var}[X(t)] = A^2/2$。均值恒为零、二阶矩有限，同时协方差只含时差 τ，所以该过程宽平稳。

---

14 零相关与独立的区别

> 用 X 在 $\{-1, 0, 1\}$ 上均匀分布且 $Y = X^2$ 的例子，说明零相关不足以推出独立。

1. 列出三个可能结果

三种 (X, Y) 分别为 $(-1, 1), (0, 0), (1, 1)$，每种概率均为 $1/3$。由表中的左右对称可算出 $E[X] = 0$，并且 $E[Y] = 2/3$。

2. 计算协方差和相关系数

$XY = X^3$，三个可能值为 $-1, 0, 1$，所以 $E[XY] = 0$。于是 $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0 - 0(2/3) = 0$。$X, Y$ 都有正方差，相关系数等于零。

3. 用条件概率检验独立性

知道 $X = 0$ 时，$Y = X^2$ 必为 0，因此 $P(Y = 0 \mid X = 0) = 1$。只看 Y 时，$P(Y = 0) = 1/3$。知道 $X = 0$ 改变了事件 $Y = 0$ 的概率，故二者依赖。这个例子说明零相关仍允许 $Y = X^2$ 这样的非线性关系。